

単純特異点リンクにまつわるはめ込みのトポロジー

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
田邊真郷 (Masato TANABE) *

概要

はめ込みの正則ホモトピーによる分類や、具体的なはめ込みの性質を調べる研究は、Whitney, Smale, Hirsch らの研究に端を発して古くから研究されてきた。近年、Kinjo, Némethi–Pintér は、単純特異点リンクにまつわる 3 次元球面の 4, 5 次元空間へのはめ込みを独立に構成・研究した。講演者は、彼らのはめ込みが実は正則ホモトピックであったことを明らかにし、その証明の鍵となるはめ込みの Wu 不変量に新たな幾何学的解釈を与えた。本稿の前半部は、研究のキーワードであるはめ込み・単純特異点リンクのそれぞれ独立した概説である (第 1 章・第 2 章)。後半部において、先行研究のはめ込みの構成方法、援用したはめ込みの分類理論、そして講演者の主結果について述べる (第 3 章)。本稿の内容は講演者のプレプリント [Tan24] に基づく。本稿では、特にことわらない限り、多様体や写像はすべて C^∞ 級であるとする。

1 はめ込みのトポロジー

本章では、はめ込みの分類問題について紹介する。詳しくは [Ada84] 等を参照されたい。本章を通して、 M, N を多様体とする。

1.1 定義・Whitney の研究

まずは分類対象と分類基準を定義しよう。

定義 1.1. 写像 $f: M \rightarrow N$ が**はめ込み**であるとは、任意の点 $x \in M$ における微分 $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射であることをいう。はめ込みは $f: M \looparrowright N$ と表される。

定義 1.2. はめ込みの連続族 $\{f_t: M \looparrowright N\}_{t \in [0,1]}$ を**正則ホモトピー**という。二つのはめ込み $f, g: M \looparrowright N$ が**正則ホモトピック**であるとは、それらを結ぶ正則ホモトピーが存在することをいう。

多様体 M から多様体 N へのはめ込みの正則ホモトピー類全体が成す集合を $\text{Imm}[M, N]$ と書く。はめ込みの分類問題とは、この集合 $\text{Imm}[M, N]$ がどれだけ大きいかを問うことに他ならない。そのような問題が興味を持たれ始めた契機は、Whitney–Graustein による以下の定理だと思われる。

定理 1.3 ([Whi37]). 回転数を与える写像 $\text{rot}: \text{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2] \rightarrow \mathbb{Z}$ は全単射である。

この定理は、 $\text{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2]$ が $\mathbb{Z}$ 程度の大きさを持つだけでなく、簡便な完全不変量まで与えて

* E-mail: tanabe.masato.i8@elms.hokudai.ac.jp

くれている。はめ込みの分類が、「回転数の計算」という代数トポロジー的な営みによって達成されるのである。また、Whitney は、多様体論で有名な埋め込み・はめ込み可能性の問題を調べる過程で、 m 次元多様体の $2m$ 次元多様体へのはめ込みに対する正則ホモトピー不変量として「自己交叉数」という量も発見した（残念ながらはめ込みを分類し切るものではなかったが）[Whi44]。しかし、これらの結果以降、はめ込みの分類理論について目立った成果はしばらく現れなかった。

1.2 Smale–Hirsch 理論

はめ込みの研究を爆発的に加速させたのは、1950 年代後半、Smale と Hirsch による 3 つの結果であった。第 1 の結果は以下である。

定理 1.4 ([Sma59a]). $\text{Imm}[S^2, \mathbb{R}^n]$ からホモトピー群 $\pi_2(V_{n,2})$ への全単射が存在する。

ただし、 $V_{n,k}$ は $\mathbb{R}^n$ の k -枠（一次独立な k 本のベクトルの組）全体が成す空間 — **Stiefel 多様体** を表す^{*1}。 $\pi_2(V_{3,2}) = \pi_2(\text{SO}(3))$ は自明群なので、以下の系を得る。

系 1.5. $\text{Imm}[S^2, \mathbb{R}^3]$ は一点集合である。特に、標準的な埋め込み $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ について、 ι と $-\iota$ ははめ込みとして正則ホモトピックである。

「特に、」以降の事実は**球面の裏返し** (sphere eversion) と呼ばれており、当時はかなり驚きの結果だった。Smale は裏返しの可能性だけを示したが、その後の研究者によって、裏返しの具体的な記述も与えられた。例えば Francis–Morin^{*2}を参照されたい [FM80]。

第 2 の結果は、上の結果から程なくして Smale 自身が与えた、任意次元の球面の Euclid 空間へのはめ込みの分類である。彼は、はめ込みの微分写像に注目するという回転数の概念を汲んだアイデアで、とある完全不変量を構成してみせた。この不変量は、今日では **Smale 不変量** と呼ばれている。

定理 1.6 ([Sma59b]). Smale 不変量 $\Omega: \text{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n] \rightarrow \pi_k(V_{n,k})$ は群同型である。ただし、 $\text{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n]$ にははめ込みの連結和で群構造を入れる。

例 1.7. $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \pi_3(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^5] \cong \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathbb{Z}$.

最後に、第 3 の結果は Hirsch によって与えられた。Smale の結果を、一般の多様体間のはめ込みに対して一般化したのである。彼の結果を述べるために、以下の概念を導入しよう。

定義 1.8. 接束間の連続写像 $F: TM \rightarrow TN$ が**形式的なはめ込み**であるとは、任意の点 $x \in M$ において、ファイバー間の線型写像 $F_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射であることをいう。

注意 1.9. 形式的なはめ込みは底空間のあいだの連続写像 $\bar{F}: M \rightarrow N$ を誘導する。しかし、 F が $\bar{F}$ の微分であることは要請しないことに注意されたい。はめ込みは底空間方向の様子がファイバー方向に微分として反映されるが、形式的なはめ込みではその必要はないのである。

^{*1} Stiefel 多様体は等質空間の構造を持ちます: $V_{n,k} \cong \text{GL}(n, \mathbb{R}) / \text{GL}(n-k, \mathbb{R}) \simeq \text{SO}(n) / \text{SO}(n-k)$ 。この空間のホモトピー群は、ファイバー束のホモトピー長完全列を利用すると比較的容易に求められます。

^{*2} Morin は盲目の数学者だったそうです。

定義 1.10. 形式的なはめ込みの連続族 $\{F_t: TM \rightarrow TN\}_{t \in [0,1]}$ を**形式的な正則ホモトピー**という。二つの形式的なはめ込み $F, G: TM \rightarrow TN$ が**正則ホモトピック**であるとは、それらを結ぶ形式的な正則ホモトピーが存在することをいう。

多様体 M から多様体 N への形式的なはめ込みの形式的な正則ホモトピー類全体が成す集合を $\text{Imm}^{\text{form}}[M, N]$ と書こう。Hirsch が示したこと（の一部）は以下の通りである^{*3}。

定理 1.11 ([Hir59]). 微分 $\text{Imm}[M, N] \rightarrow \text{Imm}^{\text{form}}[M, N]$, $f \mapsto df$ は全単射である。

$\text{Imm}^{\text{form}}[M, N]$ という集合は、 $\text{Imm}[M, N]$ よりも随分と扱いやすい。一つ例を見ておこう。

例 1.12. M を平行化可能多様体（つまり、接束 TM が自明化可能である）とし、 $\text{Imm}^{\text{form}}[M, \mathbb{R}^n]$ を「計算」する。まず、二つの自明化 $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を固定する。これらを通じれば、 M の $\mathbb{R}^n$ への形式的なはめ込みとは、ファイバーごとに単射な束準同型 $M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に他ならない。この束準同型は連続写像 $M \rightarrow \mathbb{R}^n \times V_{n,m}$ と等価であるから、全単射

$$\text{Imm}[M, \mathbb{R}^n] = \text{Imm}^{\text{form}}[M, \mathbb{R}^n] = [M, \mathbb{R}^n \times V_{n,m}] = [M, V_{n,m}]$$

を得る。ただし、 $[X, Y]$ は位相空間 X, Y 間の連続写像のホモトピー類全体が成す集合を表す。

Hirsch の定理を以て、はめ込みの分類理論は代数トポロジー — 微分写像のホモトピー論 — へと帰着された。また、球面のはめ込みであれば、Smale 不変量という具体的な完全不変量も知られている。今日では、彼らの業績はまとめて **Smale–Hirsch 理論**と呼ばれている。さらに、Hirsch の定理およびその証明技法は**ホモトピー原理** (*h-principle*) として一般化され、付加構造つきのはめ込みや、より広い対象の研究にも大きな波及を見せている。

2 単純特異点リンク

本章では、複素特異点、特に単純特異点のトポロジー的側面について紹介する。詳しくは [Mil68, AGV85, Sea06, Kas15, Sea19] 等を参照されたい。

2.1 リンクと Milnor ファイバー

複素超曲面の特異点を解析する上で、しばしば次の空間を考える。

定義 2.1 (リンクと Milnor ファイバー^{*4}). $h: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を、原点に孤立特異点を持った複素正則関数芽とし、超曲面孤立特異点 $(h^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ を考える。このとき、充分小さな正数 $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して定まる実 $2n - 3$ 次元多様体 $K := h^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n-1}$ を h の**リンク**という。さら

^{*3} 実際に Hirsch が示したことは、はめ込み全体の空間と形式的なはめ込み全体の空間の弱ホモトピー同値性でした。本来はそこまで言及して初めて Hirsch の結果です。しかし、講演者の研究が関連するのはその弧状連結成分 (π_0) に関するものでしたので、本文では結果を絞って紹介しました。

^{*4} リンクという呼び名は、 $n = 2$ の場合、リンクが 3 次元球面内の 1 次元部分多様体（すなわち、円周の非交和の埋め込み）となることに由来します。また、Milnor ファイバーという呼び名は、Milnor のファイブレーション定理に由来します。この定理は歴史的に重要ですが、今回の研究にあたっては関連性が薄いため割愛します。

に、充分小さな正数 $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ に対して定まる複素 $n-1$ 次元多様体 $F := h^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon^{2n}$ を h の **Milnor ファイバー** という。

リンクは Milnor ファイバーの境界 $\partial F = h^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon^{2n-1}$ と球面 S_ε^{2n+1} 内でアイソトピックである。リンクの具体例としては、Poincaré のホモロジー 3 次元球面、エキゾチック 7 次元球面など、トポロジーにおいて重要な空間が現れる。さらに、球面 S_ε^{2n+1} およびリンク K 上にはそれぞれ

$$\xi_{\text{std}} := TS_\varepsilon^{2n+1} \cap J(TS_\varepsilon^{2n+1}), \quad \xi_{\text{can}} := TK \cap J(TK)$$

によって接触構造が入り、 $(K, \xi_{\text{can}}) \subset (S_\varepsilon^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$ は接触部分多様体となる。 ξ_{can} は K 上の**標準接触構造**と呼ばれる。これに加え、リンクや Milnor ファイバーは豊富な構造を備えており、特異点論・トポロジー・組合せ論・接触/シンプレクティック/複素/スピン幾何といった多様な観点から研究され続けてきた。

さて、Arnol'd は、複素函数芽 $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対してモダリティと呼ばれる概念を導入し、モダリティ 2 までを持つ函数芽の完全な分類を行った。表題にある**単純特異点**とは、モダリティ 0 を持つ函数芽の特異点である。Arnol'd の結果によると、単純特異点は A, D, E 型に分類される。以下でも垣間見ることになるが、この分類は正多面体の分類や単純 Lie 代数の分類といった他の様々な数学と関連している。そのため、単純特異点は各方面から **Klein 特異点**, **du Val 特異点**, **有理二重特異点**などとも呼ばれている。

以降、3 変数函数芽の単純特異点が定めるリンク — 本稿ではこれを**単純特異点リンク**と呼ぶ — に注目しよう。この場合、単純特異点を表す函数芽の標準形として以下のものが知られている。

- A_{n-1} ($n \geq 2$): $x^2 + y^2 + z^n$
- D_{n+2} ($n \geq 2$): $x^2 + y^2z + z^{n+1}$
- E_6 : $x^2 + y^3 + z^4$
- E_7 : $x^2 + y^3 + yz^3$
- E_8 : $x^2 + y^3 + z^5$

定義から、単純特異点リンクは 5 次元球面内に埋め込まれた 3 次元多様体である。 A_{n-1} 型のリンクはレンズ空間 $L(n, n-1)$ に、 E_8 型のリンクは Poincaré のホモロジー 3 次元球面に微分同相であることが（後述の構造を見るなどすると）分かる。単純特異点リンクは多様な幾何構造を持つが、本稿で注目するのは以下に述べる 2 種類の見方である。

2.2 軌道空間としての幾何構造 — $SU(2)$ の有限部分群から

Arnol'd の分類よりもずっと昔、Klein は $SU(2)$ の有限部分群を分類し、それらが単純特異点（と後に呼ばれたクラスの特異点）に対応することを示した [Kle56]。対応関係は以下の通りである。

- A_{n-1} ($n \geq 2$): 位数 n の巡回群 C_n
- D_{n+2} ($n \geq 2$): 位数 $4n$ の二項二面体群 Dic_n
- E_6 : 四面体群 $2T$ （位数は 24）
- E_7 : 八面体群 $2O$ （位数は 48）

- E_8 : 十二面体群 $2I$ (位数は 120)

$\Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$ を上記の群のひとつとしよう. Γ は $\mathbb{C}^2$ に左から作用し, 商特異点 $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ を定める (原点が特異点). Klein は $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ が $\mathbb{C}^3$ 内の複素超曲面の特異点として実現されることを示した. ここに現れる超曲面の定義方程式が, 対応する単純特異点のそれであったのである. このとき, 軌道空間 $\Gamma \backslash S^3$ は, 対応する特異点のリンク K に微分同相となる. トポロジカルに言えば, リンク K は, S^3 からの普遍被覆 $p: S^3 \rightarrow K$ であって被覆変換群が Γ であるものを許容する.

なお, 実現の写像, すなわちパラメタづけ $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\Gamma \backslash \mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ は, 例えば A_{n-1} 型, D_{n+2} 型に対しては以下のように表せることが知られている:

$$(s, t) \mapsto \left(\frac{1}{2}(s^n - t^n), \frac{\sqrt{-1}}{2}(s^n + t^n), st \right), \quad (s, t) \mapsto \left(\frac{st}{2}(s^{2n} - t^{2n}), \frac{\sqrt{-1}}{2}(s^{2n} + t^{2n}), s^2 t^2 \right).$$

2.3 鉛管多様体としての幾何構造 — Dynkin 図形から

一般に, 超曲面孤立特異点 $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ が, 有限回のブローアップによって解消され, 現れる例外曲線たちが正規交叉するようにできたとしよう. 特異点リンクは解消される特異点のまわりに現れる多様体だったので, 例外曲線たちの合併の正則近傍の境界に微分同相である. このような状況は, トポロジーの言葉を遣うと以下のようにまとめられる. 「重み付きグラフ G を, 例外曲線に対応して頂点 (重みは自己交叉数) を置き, 例外曲線同士が交わっているとき辺を結ぶ (重みはその交叉数) ことによって構成する. このとき, 件の特異点の特異点解消およびリンクは, G を台グラフとするような鉛管 4 (resp. 3) 次元多様体 $X(G)$ (resp. $M(G)$) に微分同相である.」

単純特異点は上記の例となっており, 極小特異点解消と呼ばれる解消に現れる台グラフが, 古くから **Dynkin 図形**と呼ばれるものになっている (図 2.3).

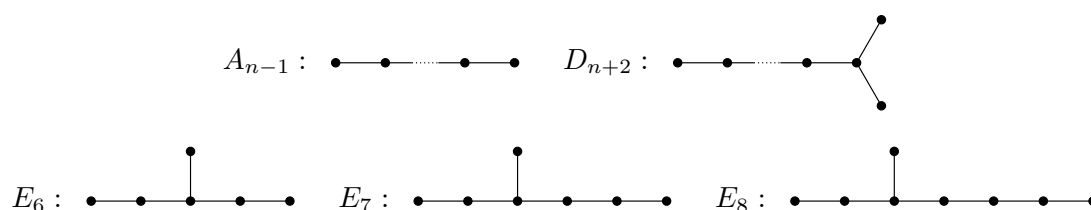


図 1 A - D - E 型の Dynkin 図形 (頂点数は添字と一致している. 頂点の重みは -2 , 辺の重みは 1 とする)

さらに, 単純特異点に限っては, その Milnor ファイバー F も $X(G)$ に微分同相となる. つまり, 極小特異点解消と Milnor ファイバーが同じ微分同相型を持つ. しかしながら, それぞれが許容する自然な複素構造は全く異なることに注意しておこう. というのも, 極小特異点解消内は, 例外曲線 $\mathbb{C}P^1$ たちを複素部分多様体として含んでいる. 一方で, F は $\mathbb{C}^3$ の複素部分多様体なので, コンパクトで境界を持たないような複素部分多様体を持つことはできない (Liouville の定理). より詳しく, 極小特異点解消における例外曲線たちの合併に Milnor ファイバー側で対応するのは, 実断面 $F \cap \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ である. この一つ一つの既約成分は F の総実 (totally real) な部分多様体である.

3 本研究の概要および主結果

本章では、講演者が今回取り組んだ研究、および得られた主結果について紹介する．詳しくは [Tan24] を参照されたい．

3.1 単純特異点リンクにまつわるはめ込み

本研究のモチベーションは、以下の独立した二つの先行研究の間に見出だされる、とある関係性であった．一つ目の研究は、Némethi–Pintér による、複素特異点とはめ込み理論の融合である [NP15]．彼らは、 $(\mathbb{C}^2, 0)$ からのパラメタづけを持つような $\mathbb{C}^3$ 内の超曲面特異点に対し、以下の手続きではめ込みを得た．特異点のパラメタづけを $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ と置く．（技術的な仮定として、 Φ は原点だけに特異点を持つとする．） $\mathbb{C}^3$ 内で原点を中心とする充分小さな球面 S_ϵ^5 をとり、逆像 $\mathfrak{S} := \Phi^{-1}(S_\epsilon^5)$ を考える． $\mathfrak{S}$ は S^3 に微分同相であることから、はめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}: S^3 \looparrowright S_\epsilon^5 - \{1\text{pt.}\} = \mathbb{R}^5$ が得られる．彼らの主結果は、 Φ が持つ複素特異点の重複度と $\Phi|_{\mathfrak{S}}$ の Smale 不変量を関係づける公式であった．そして、彼らは公式の具体例として、単純特異点から得られるはめ込みを考えた．

定理 3.1 ([NP15]). 単純特異点とそのパラメタづけ $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\Gamma \setminus \mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ に対し、誘導されるはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}}) \in \mathbb{Z}^{*5}$ は

$$\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}}) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}); \\ -167 & (E_6 \text{ の場合}); \\ -383 & (E_7 \text{ の場合}); \\ -1079 & (E_8 \text{ の場合}). \end{cases}$$

ここで、上記のはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}$ は

$$\Phi|_{\mathfrak{S}} = f \circ p: S^3 \rightarrow \Gamma \setminus S^3 \cong K \hookrightarrow \mathbb{R}^5$$

と分解されることに注意しておく．ただし、 p はリンク上の普遍被覆を、 f はリンクの $S_\epsilon^5 - \{1\text{pt.}\} = \mathbb{R}^5$ への包含写像を表す．

二つ目の研究は、Kinjo による、単純特異点リンクを通じた非自明なはめ込みの構成およびその Smale 不変量の計算である [Kin15]．Kinjo は、単純特異点リンクの鉛管構造に注目することで、以下のようにはめ込みを構成した．まず、はめ込み $w: S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$ であって、正の自己交叉を唯一つだけ持つようなものを考える（これを Whitney の球面という）．この法 Euler 数は -2 であるため、法束は余接束 T^*S^2 に同型である．法束の円盤化・円周化をそれぞれ

$$\hat{g}_{A_1}: DT^*S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_{A_1}: UT^*S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$$

と置こう． $DT^*S^2 = X(A_1)$ および $UT^*S^2 = M(A_1)$ に注意（記号は 2.3 節を参照）すれば、 A_1 型リンクの $\mathbb{R}^4$ へのはめ込みが得られたことになる．あとはこれをはめ込みごと鉛管工事することで、

*5 計算のためには同型 $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^5] \cong \mathbb{Z}$ を固定する必要がありますが、ここでは説明を省略します．

任意の A - D - E 型 Dynkin 図形 G に対して、はめ込み

$$\hat{g}_G: X(G) \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_G: M(G) \looparrowright \mathbb{R}^4$$

が得られる。Kinjo は、 g_G を普遍被覆 $p: S^3 \rightarrow M(G)$ で引き戻すことによって、はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ を得た。そして、 A 型および D 型に対して、以下の結果を得た。

定理 3.2 ([Kin15]). A 型および D 型の単純特異点、および対応する Dynkin 図形 G を考える。このとき、はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{*6}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}). \end{cases}$$

注意が二点ある。一点目に、Kinjo の結果は $M(G)$ の向きが裏返ったものに対する計算であって、上記の結果はそれを裏返し直したはめ込みに対するものである^{*7}。ただ、これは非本質的なので、あまり気にしないことにする。二点目に、Kinjo は E 型に対する結果を得ていない。というのも、彼女が Smale 不変量の計算に用いたのは、「与えられたはめ込みを境界に持つような 1 次元高い写像を構成し、その実特異点を数え上げる」という職人技だったためである（これを特異 Seifert 膜の手法という [ET11]）。膜の張り方や特異点の数え上げは、 E 型に応用できるようなものではなかった。

上記二つの研究は、それぞれ異なるモチベーション・手法からのものであったにも拘らず、奇妙な関係性を持っていた。Kinjo のはめ込みを $\mathbb{R}^5$ に押し出して得られるはめ込みの Smale 不変量を計算すると、以下を得るのである。 $j: \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ を包含写像としよう。

系 3.3. A 型および D 型の単純特異点、および対応する Dynkin 図形 G を考える。このとき、はめ込み $j \circ g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(j \circ g_G \circ p) \in \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(j \circ g_G \circ p) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}). \end{cases}$$

これと定理 3.1 を比較すると、Smale 不変量（正則ホモトピー分類の完全不変量！）の一致から、 A 型と D 型の場合には、二つのはめ込み $\Phi|_{\mathbb{S}} = f \circ p$ と $j \circ g_G \circ p$ が正則ホモトピックであることが判明する。この事実は既に [NP15, Kin15] 両者から指摘されていたが、幾何学的な理由は調べられていなかった。そこで、講演者は以下二つの問いを立て、いずれも肯定的に解決した。

問題 3.4. (1) E 型に対しても g_G の Smale 不変量が求められるか？

(2) そもそも f と $j \circ g_G$ が正則ホモトピックなのではないか？

この解決のために、講演者は Wu および Saeki–Szűcs–Takase による有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類・完全不変量に関する研究を援用し、不変量の新たな幾何学的解釈を与えた。

^{*6} 計算のためには同型 $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を固定する必要がありますが、ここでは説明を省略します。

^{*7} 正確に言うと、Kinjo の論文では、Dynkin 図形に重み +2 を載せたグラフが用いられていました。

3.2 3次元多様体の5次元空間へのはめ込みの分類

M^3 を向きづけられた連結閉 3 次元多様体とする．障害理論により， M^3 は平行化可能である．よって，例 1.12 で見たことから，全単射

$$\text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5] \rightarrow [M^3, V_{5,3}]$$

が得られる．Wu は [Wu64] において，右辺のホモトピー集合を解析し， M^3 の $\mathbb{R}^5$ へのはめ込みに対する完全不変量を得た．完全不変量は二つの不変量から成る．一つ目は M^3 の 2-骨格上で定まる **Wu 不変量**，二つ目は Smale 不変量の類似に相当する **Smale 型不変量** である^{*8}．しかしながら，Wu によって与えられた Smale 型不変量の表式は，具体的計算には向かなかった．これを改善したのが Saeki–Szűcs–Takase [SST02]（はめ込みの法束が自明な場合）および Juhász [Juh05]（一般の場合）であった．彼らは，特異 Seifert 膜という概念を用い，幾何学的かつ簡便な Smale 型不変量の計算方法を与えた．まずは Wu 不変量の定義から紹介しよう．

定義 3.5. M^3 の平行化 $\tau: TM^3 \rightarrow M^3 \times \mathbb{R}^3$ を固定する．はめ込み $f: M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ に対して，微分が定める写像を $\varphi_{\tau,f}: M^3 \rightarrow V_{5,3}$ と置く．このとき，生成元 $\Sigma \in H^2(V_{5,3}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の引き戻し

$$c_{\tau}(f) := (\varphi_{\tau,f})^*(\Sigma) \in H^2(M^3; \mathbb{Z})$$

を f の τ に関する **Wu 不変量** という．

注意 3.6. 生成元 Σ は， $\text{SO}(2)$ -束 $\text{SO}(5) \rightarrow \text{SO}(5)/\text{SO}(2) \cong V_{5,3}$ の Euler 類が 2Σ となるように選ぶ．これは，Wu 不変量の 2 倍がはめ込み f の法 Euler 類と一致することに他ならない．

注意 3.7. Wu 不変量は， M^3 の平行化に依存して値が切り替わる^{*9}．このため，Wu 不変量を計算するためには，そもそものような平行化を選び取るかが問題となる．

Smale 型不変量については，設定や定義が少々複雑なので，研究で用いた部分のみ紹介する．

定義 3.8. 法束が自明なはめ込み $f: M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ に対して，それを境界に持つ写像 $\hat{f}: X^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^6$ をとる．ただし， X^4 は M^3 を境界に持つようなコンパクト有向 4 次元多様体とする．このとき，整数値

$$i(f) := \frac{3}{2}(\sigma(X^4) - \alpha(M^3)) + s(\hat{f}) \in \mathbb{Z}$$

を f の **Smale 型不変量** という．ただし， $\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数， $\alpha(M^3) := \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M^3; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ ， $s(\hat{f})$ は $\hat{f}$ の特異性に関わる量である． $\hat{f}$ が埋め込みに正則ホモトピックならば， $s(\hat{f}) = 0$ となる．

計算に現れる写像 $\hat{f}$ を， f の **特異 Seifert 膜** という．この下で，[SST02] は以下を示した． $\text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0$ を，法束が自明なはめ込み $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ の正則ホモトピー類全体が成す集合とする．また， $\Gamma_2(0) := \{C \in H^2(M^3; \mathbb{Z}) \mid 2C = 0\}$ と置く．

^{*8} Smale 型不変量という名称は講演者がつけたもので，一般的ではありません．

^{*9} この依存性は [Tan24, Appendix A] で詳しく述べています．

定理 3.9 ([Wu64, SST02]). $i: \text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ は well-defined である. さらに, 対応

$$(c_\tau, i): \text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0 \rightarrow \Gamma_2(0) \times \mathbb{Z}$$

は全単射である.

3.3 主結果

注目していたはめ込み $f: K \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ と $j \circ g_G: M(G) \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ は, どちらも有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みである. しかも, 定義域はそれぞれリンク K と鉛管多様体 $M(G)$ であり, ある微分同相によって同一視することができる. 微分同相を固定すれば, f と $j \circ g_G$ が正則ホモトピックであるかを問うことに意味がある. 定理 3.9 から, 正則ホモトピック性は Wu 不変量と Smale 型不変量の計算によって判定できる. この戦略に基づき, 講演者は, 問題 3.4(2) を肯定的に解決した. 主定理は以下の通りである.

定理 3.10 ([Tan24]). 任意の単純特異点を考える. そのリンクを K , Milnor ファイバーを F , 対応する Dynkin 図形を G とする. K の平行化 $\tau: TK \rightarrow K \times \mathbb{R}^3$ を, K 上の標準接触構造に沿って固定する. このとき,

$$(c_\tau(f), i(f)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(F) - \alpha(K)) \right),$$

$$(c_\tau(j \circ g_G), i(j \circ g_G)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(X(G)) - \alpha(M(G))) \right).$$

したがって, f と $j \circ g_G$ は正則ホモトピックである.

Smale 型不変量 i の方は, Milnor ファイバーが (特異点のない) 特異 Seifert 膜として選べるため, 比較的容易に計算できる. 主定理の新規性は Wu 不変量の計算 — より正確には, 適切な平行化を選び取り, その下で Wu 不変量の消滅を得たこと — にある. 本稿では詳しく述べられないが, f の Wu 不変量の消滅は K が $\mathbb{R}^5$ の (概) 接触部分多様体になっていること, $j \circ g_G$ の Wu 不変量の消滅は正則ホモトピーによって, g_G の構成に用いた w たちが $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ への総実 (totally real) なはめ込みにできること^{*10}, したがって, $M(G)$ 上の (概) 接触構造が g_G によって $\mathbb{C}^2$ へはめ込まれると複素接触することが本質的に効いている. 講演者は, これらの消滅を, Wu 不変量の定義に登場するコホモロジー類 $\Sigma \in H^2(V_{5,3}; \mathbb{Z})$ の棲み処である $V_{5,3} = \text{SO}(5)/\text{SO}(2)$ を他の空間 $\text{SO}(5)/\text{U}(2)$, $\text{SO}(4)$ に移すことで証明した. この手法は, 定義域多様体に引き戻す前のコホモロジー類を解析するものであり, 定義域多様体のトポロジーに振り回されない「普遍的な」証明を教えてくれる.

最後に, 上記の正則ホモトピック性を利用することで, 講演者は問題 3.4(1) を肯定的に解決した. さらに, [Kin15] により既知であった A, D 型の計算結果を再証明することにも成功した. ただし, 証明は G. Pintér 氏の提案による^{*11}.

^{*10} この変形は, g_G および $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ が $X(G)$ 上に誘導する複素構造が, Milnor ファイバーの複素構造と (概複素構造として) 同一となることを見据えたものです. この $X(G)$ 上の複素構造から $M(G)$ 上に概接触構造が誘導し, これを備えた $M(G)$ は標準接触構造を備えたリンク K と概接触多様体として同一視することができます.

^{*11} Pintér 氏からは, プレプリント第 1 版の投稿後すぐに, 沢山の情報と共に連絡を頂きました. 定理 3.11 の証明を含め, 沢山の議論を交わすことができました.

定理 3.11 ([Tan24]). 任意の単純特異点, および対応する Dynkin 図形 G を考える. このとき, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}); \\ (-169, 1) & (E_6 \text{ の場合}); \\ (-385, 1) & (E_7 \text{ の場合}); \\ (-1081, 1) & (E_8 \text{ の場合}). \end{cases}$$

証明には, 今回の主結果である定理 3.1, [NP15] の定理 3.10, そして $g_G \circ p$ の法写像度の計算のみを用いる. これは, [Kin15] における特異 Seifert 膜を用いた技法とは大きく異なる.

参考文献

- [Ada84] 足立正久: 埋め込みとはめ込み, 岩波書店, 1984.
- [AGV85] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps I*, Monograph in Math. **82**, Birkhäuser, 1985.
- [ET11] T. Ekholm and M. Takase: *Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions*, Bull. Lond. Math. Soc. **43**(2) (2011), 251–266.
- [FM80] G. K. Francis and B. Morin: *Arnold Shapiro's eversion of the sphere*, Math. Intell. **2** (1980), 200–203.
- [Hir59] M. W. Hirsch: *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.
- [Juh05] A. Juhász: *A geometric classification of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **117**(1) (2005), 65–83.
- [Kas15] N. Kasuya: *On the Links of Simple Singularities, Simple Elliptic Singularities and Cusp Singularities*, Demonstr. Math. **48**(2) (2015), 289–312.
- [Kas16] N. Kasuya: *An obstruction for codimension two contact embeddings in the odd dimensional Euclidean spaces*, J. Math. Soc. Jpn. **68**(2) (2016), 737–743.
- [Kin15] S. Kinjo: *Immersions of 3-sphere into 4-space associated with Dynkin diagrams of types A and D*, Bull. Lond. Math. Soc. **47**(4) (2015) 651–662.
- [Kle56] F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner(Leipzig), 1884. [English translation: *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover, 1956.]
- [Mil68] J. W. Milnor: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, AMS **61**, Princeton Univ. Press, 1968.
- [NP15] A. Némethi and G. Pintér: *Immersions associated with holomorphic germs*, Comment. Math. Helv. **90**(3) (2015), 513–541.
- [SST02] O. Saeki, A. Szűcs, and M. Takase: *Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **108**(1) (2002), 13–32.
- [Sea06] J. Seade: *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*, Prog. Math. **241**, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [Sea19] J. Seade: *On Milnor's fibration theorem and its offspring after 50 years*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **56**(2) (2019), 281–348.
- [Sma59a] S. Smale: *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90**(2) (1959), 281–290.
- [Sma59b] S. Smale: *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*, Ann. of Math. **69** (1959), 327–344.
- [Tan24] M. Tanabe: *Regular homotopy classes of links of simple singularities and immersions associated with their Dynkin diagrams*, arXiv:2405.02513 [math.GT], preprint.
- [Whi37] H. Whitney: *On regular closed curves in the plane*, Compos. Math. **4** (1937), 276–284.
- [Whi44] H. Whitney: *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Ann. of Math. **45**(2) (1944), 220–246.
- [Wu64] W. T. Wu: *On the immersion of C^∞ -3-manifolds in a Euclidean space*, Sci. Sinica **13** (1964), 335–336.